

O b-kolorowaniach, czyli jak szybko znaleźć dobre przybliżenie kolorowania poprawnego

Kolorowanie wierzchołkowe grafów jest jednym z bardziej znanych problemów optymalizacji kombinatorycznej. Wśród jego zastosowań można wymienić chociażby układanie harmonogramów, przydział częstotliwości radiowych, czy klasyczne kolorowanie map. Wyznaczenie liczby chromatycznej i optymalnego kolorowania jest problemem NP-trudnym. Z tego powodu część badań została ukierunkowana na znalezienie efektywnych algorytmów przybliżonych. Najprostszym i najbardziej znanym jest kolorowanie zachłanne, w którym po uporządkowaniu wierzchołków koloruje się je kolejno pierwszym dostępnym kolorem (dołączając kolejny kolor, jeśli wszystkie zostały zablokowane). W najlepszym przypadku można uzyskać dokładne optimum, zaś najgorszą sytuację charakteryzuje tzw. liczba chromatyczna Grundy'ego (są rodziny grafów, dla których może ona być dowolnie odległa od liczby chromatycznej). Niejako odwrotnym podejściem, na którym skupię się w referacie, jest algorytm przekolorowujący, w którym zaczyna się od trywialnego kolorowania (w którym każdy wierzchołek otrzymuje inny kolor), a następnie, najdłużej jak się da, przekolorowuje się wszystkie wierzchołki pokolorowane jakimś kolorem. Efekt końcowy działania algorytmu nazywa się b-kolorowaniem. Również ta metoda pozwala niekiedy na znalezienie optimum, a najgorszy wariant charakteryzuje tzw. liczba b-chromatyczna. We wstępie przedstawię najważniejsze własności b-kolorowań (w tym te dotyczące złożoności). W dalszej części skupię się na b-kolorowaniach acyklicznych, czyli takich, które są nie tylko poprawne, ale też gwarantują, że każde dwa kolory indukują las, albo równoważnie, na każdym cyklu występują co najmniej trzy kolory (przykładowym zastosowaniem kolorowań acyklicznych jest efektywne wyznaczanie wartości hesjanu funkcji, niezbędne na przykład w optymalizacji nieliniowej). W referacie omówię wybrane wyniki badań na ten temat, w szczególności przedstawię pewne własności b-kolorowań acyklicznych i scharakteryżuję rodziny grafów ekstremalnych ze względu na wybrane z nich.