

Falki logistyczne i ich zastosowania

Grzegorz Rządkowski

Politechnika Warszawska, Wydział Zarządzania

'Styczniowe' Wirtualne Seminarium z Badań Operacyjnych
17 stycznia 2022r



Badania zostały częściowo sfinansowane z projektu “IDUB against COVID-19” ze środków Politechniki Warszawskiej w ramach Programu Inicjatywa Doskonałości-Uczelnia Badawcza (IDUB)

Prezentacja została opracowana głównie na podstawie pracy:

Rządkowski, G.; Figlia, G. Logistic Wavelets and Their Application to Model the Spread of COVID-19 Pandemic. *Appl. Sci.* **2021**, *11*, 8147. <https://doi.org/10.3390/app11178147>

Dane są uaktualnione



Zagadnienia

- Funkcja logistyczna, równanie logistyczne
- Równanie Riccatiego, wzór na nt ą pochodną
- Wielomiany pochodnych
- Falki (wavelets)
- Falki logistyczne
- Zastosowanie do modelowania rozprzestrzeniania się COVID-19
- Co można byłoby jeszcze zrobić?



Dla transformaty Fouriera stosujemy konwencję:

$$\hat{f}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\xi x} dx, \quad (1)$$

gdzie $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$.



Funkcja logistyczna

Równanie logistyczne jest równaniem różniczkowym autonomicznym i ma postać

$$u'(t) = \frac{s}{u_{max}} u(u_{max} - u), \quad u(0) = u_0. \quad (2)$$

gdzie t jest czasem, $u = u(t)$ jest poszukiwaną funkcją a parametry s -stromość i u_{max} -poziom nasycenia są stałymi. Krzywą całkową $u(t)$ spełniającą warunek $0 < u(t) < u_{max}$ nazywamy funkcją logistyczną.



Funkcja logistyczna

Równanie logistyczne jest równaniem różniczkowym autonomicznym i ma postać

$$u'(t) = \frac{s}{u_{max}} u(u_{max} - u), \quad u(0) = u_0. \quad (2)$$

gdzie t jest czasem, $u = u(t)$ jest poszukiwaną funkcją a parametry s -stromość i u_{max} -poziom nasycenia są stałymi. Krzywą całkową $u(t)$ spełniającą warunek $0 < u(t) < u_{max}$ nazywamy funkcją logistyczną.

Po rozwiązaniu (2) otrzymujemy funkcję logistyczną w postaci

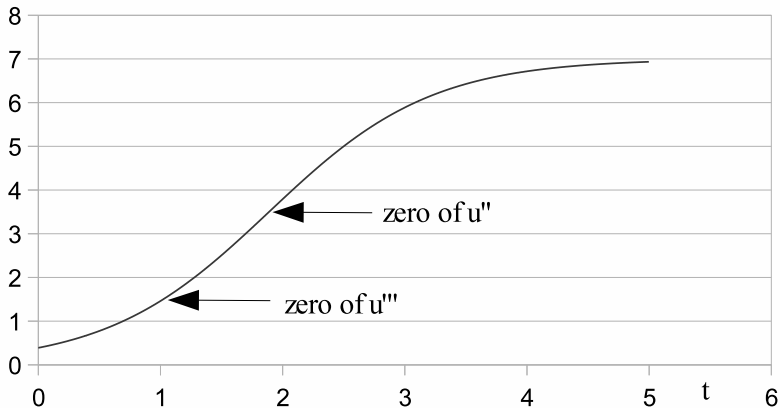
$$u(t) = \frac{u_{max}}{1 + e^{-s(t-t_0)}}, \quad (3)$$

gdzie t_0 jest punktem przegięcia, związanym z warunkiem początkowym $u(0) = u_0 = \frac{u_{max}}{1 + e^{st_0}}$, a więc

$$t_0 = \frac{1}{s} \log \left(\frac{u_{max} - u_0}{u_0} \right). \text{ Zachodzi } u(t_0) = u_{max}/2.$$



Przykładowa krzywa logistyczna



dla parametrów $u_{max} = 7$, $t_0 = 1.9$, $s = 1.5$.

Równanie Riccatiego

Równanie (2) jest szczególnym przypadkiem równania Riccatiego o stałych współczynnikach

$$u'(t) = r(u - u_1)(u - u_2). \quad (4)$$

Stałe $r \neq 0$, u_1 , u_2 są liczbami rzeczywistymi lub zespolonymi.



Równanie Riccatiego

Równanie (2) jest szczególnym przypadkiem równania Riccatiego o stałych współczynnikach

$$u'(t) = r(u - u_1)(u - u_2). \quad (4)$$

Stałe $r \neq 0$, u_1 , u_2 są liczbami rzeczywistymi lub zespolonymi.

Theorem

Jeżeli $u(t)$ jest rozwiązaniem równania (4) to pochodna $u^{(n)}(t)$ ($n = 2, 3, 4, \dots$) jest wielomianem samej funkcji $u(t)$:

$$u^{(n)}(t) = r^n \sum_{k=0}^{n-1} \left\langle \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\rangle (u - u_1)^{k+1} (u - u_2)^{n-k} \quad (5)$$

$n = 2, 3, \dots$, $\left\langle \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\rangle$ oznacza liczbę Eulerowską (Eulerian number).

Definicja kombinatoryczna - liczba permutacji zbioru $\{1, 2, \dots, n\}$ mających k , ($k = 0, 1, 2, \dots, n - 1$) wzrostów.

Tablica (trójkąt) Riordana dla liczb Eulerowskich

n	$\langle n \rangle_0$	$\langle n \rangle_1$	$\langle n \rangle_2$	$\langle n \rangle_3$	$\langle n \rangle_4$	$\langle n \rangle_5$	$\langle n \rangle_6$	$\langle n \rangle_7$
0	1							
1	1	0						
2	1	1	0					
3	1	4	1	0				
4	1	11	11	1	0			
5	1	26	66	26	1	0		
6	1	57	302	302	57	1	0	
7	1	120	1191	2416	1191	120	1	0

Table: Liczby Eulerowskie

$$\langle n+1 \rangle_k = (k+1)\langle n \rangle_k + (n-k+1)\langle n \rangle_{k-1}$$



Wielomiany pochodnych (derivative polynomials)

Kilka pierwszych wielomianów pochodnych (dla $r = -1$, $u_1 = 0$, $u_2 = 1$):

$$u'(t) = u(1 - u) = -u(u - 1) = P_2(u),$$

$$u''(t) = u(u - 1)^2 + u^2(u - 1) = P_3(u),$$

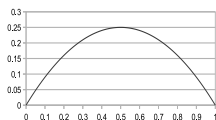
$$u'''(t) = -u(u - 1)^3 - 4u^2(u - 1)^2 - u^3(u - 1) = P_4(u),$$

$$u^{(4)}(t) = u(u - 1)^4 + 11u^2(u - 1)^3 + 11u^3(u - 1)^2 + u^4(u - 1) = P_5(u),$$

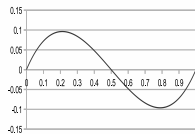
$$u^{(5)}(t) = -u(u - 1)^5 - 26u^2(u - 1)^4 - 66u^3(u - 1)^3 - 26u^4(u - 1)^2 - u^5(u - 1) = P_6(u).$$



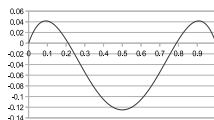
Wielomiany pochodnych, wykresy



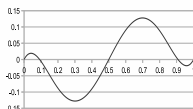
(a) $P_2(u)$



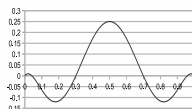
(b) $P_3(u)$



(c) $P_4(u)$



(d) $P_5(u)$



(e) $P_6(u)$

Figure: Wielomiany pochodnych $P_k(u)$, $k = 2, 3, 4, 5, 6$ dla $u \in [0, 1]$.



Rozpatrujemy funkcję (falkę matkę) $\psi(x) \in L^2(\mathbb{R})$. Funkcja $\psi(x)$ powinna spełniać tzw. warunek dopuszczalności

$$2\pi \int_{-\infty}^{\infty} |\xi|^{-1} |\hat{\psi}(\xi)|^2 d\xi < \infty. \quad (6)$$

Jeżeli ponadto $\psi(x) \in L^1(\mathbb{R})$ to warunek (6) jest równoważny warunkowi $\int_{-\infty}^{\infty} \psi(x) dx = 0$, który z punktu widzenia praktycznych zastosowań jest tożsamy z (6).



Falki (wavelets)

Rozpatrujemy funkcję (falkę matkę) $\psi(x) \in L^2(\mathbb{R})$. Funkcja $\psi(x)$ powinna spełniać tzw. warunek dopuszczalności

$$2\pi \int_{-\infty}^{\infty} |\xi|^{-1} |\hat{\psi}(\xi)|^2 d\xi < \infty. \quad (6)$$

Jeżeli ponadto $\psi(x) \in L^1(\mathbb{R})$ to warunek (6) jest równoważny warunkowi $\int_{-\infty}^{\infty} \psi(x) dx = 0$, który z punktu widzenia praktycznych zastosowań jest tożsamy z (6).

Następnie określamy, poprzez przesunięcia i rozszerzenia, podwójnie indeksowaną rodzinę falek:

$$\psi^{a,b}(x) = \frac{1}{\sqrt{a}} \psi\left(\frac{x-b}{a}\right),$$

gdzie $a, b \in \mathbb{R}$, $a > 0$.



Continuous wavelet transform (cwt), ciągła transformacja falkowa

Transformata falkowa funkcji $f(x)$ ze względu na daną rodzinę falek dana jest wzorem:

$$(T^{wav} f)(a, b) = \langle f, \psi^{a,b} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \frac{1}{\sqrt{a}} \psi\left(\frac{x-b}{a}\right) dx$$

W Wikipedii można obejrzeć ciekawą animację na temat cwt...



Definiujemy falkę matkę $\psi_2(x)$ jako drugą pochodną funkcji logistycznej $u(x) = \frac{1}{1 + e^{-x}}$:

$$\psi_2(x) = \frac{1}{1 + e^{-x}} \left(1 - \frac{1}{1 + e^{-x}}\right) \left(1 - \frac{2}{1 + e^{-x}}\right) = \frac{e^{-2x} - e^{-x}}{(1 + e^{-x})^3}.$$



Definiujemy falkę matkę $\psi_2(x)$ jako drugą pochodną funkcji logistycznej $u(x) = \frac{1}{1 + e^{-x}}$:

$$\psi_2(x) = \frac{1}{1 + e^{-x}} \left(1 - \frac{1}{1 + e^{-x}}\right) \left(1 - \frac{2}{1 + e^{-x}}\right) = \frac{e^{-2x} - e^{-x}}{(1 + e^{-x})^3}.$$

Jak zwykle określamy, poprzez przesunięcia i rozszerzenia, podwójnie indeksowaną rodzinę falek logistycznych:

$$\psi_2^{a,b}(x) = \frac{1}{\sqrt{a}} \psi_2\left(\frac{x-b}{a}\right),$$

gdzie $a, b \in \mathbb{R}$, $a > 0$.



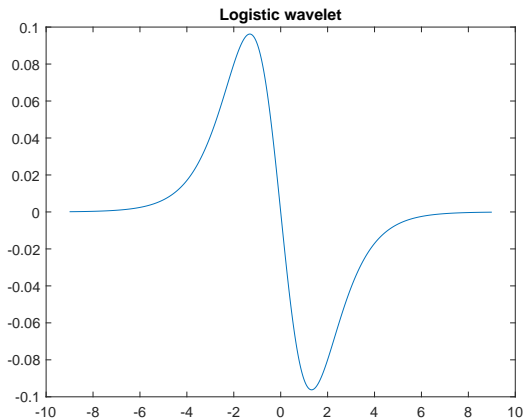


Figure: Falka matka $\psi_2(x)$

Implementacja $\psi_2(x)$ w Matlabie

```
function [psi,t] = logist(LB,UB,N,~)
%LOGISTIC Logistic wavelet.
% [PSI,T] = LOGIST(LB,UB,N) returns values of
% the Logistic wavelet on an N point regular
% grid in the interval [LB,UB].
% Output arguments are the wavelet function PSI
% computed on the grid T.
% This wavelet has [-7 7] as effective support.
% See also WAVEINFO.
% Compute values of the Logistic wavelet.
t = linspace(LB,UB,N); % wavelet support.
psi = (exp(-2*t)-exp(-t))./(1+exp(-t)).^3;
end
```



Modelujemy całkowitą liczbę osób zakażonych COVID-19 za pomocą sumy funkcji logistycznych:

$$f(x) = \sum_{j=1}^k \frac{U_{j, \max}}{1 + \exp\left(-\frac{x-b_j}{a_j}\right)},$$

gdzie k jest liczbą rozpatrywanych fal logistycznych.

Oznaczmy przez y_n^* całkowitą liczbę zakażonych do dnia n a przez y_n , 7-dniową kroczącą średnią arytmetyczną dla szeregu czasowego y_n^* :

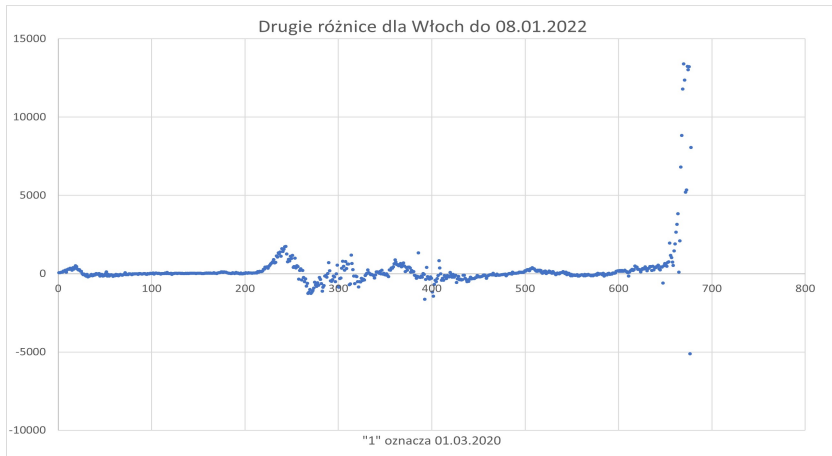
$$y_n = \frac{1}{7} \sum_{i=-6}^0 y_{n+i}^*.$$

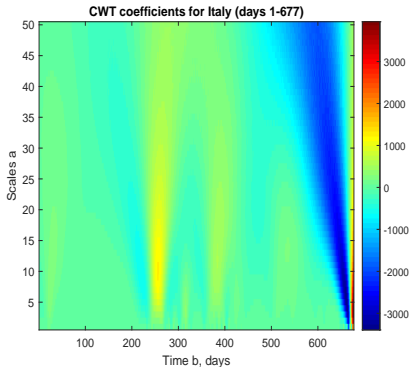
Drugie różnice ciągu y_n oznaczmy przez:

$$\Delta^2 y_n = y_{n+1} - 2y_n + y_{n-1}.$$

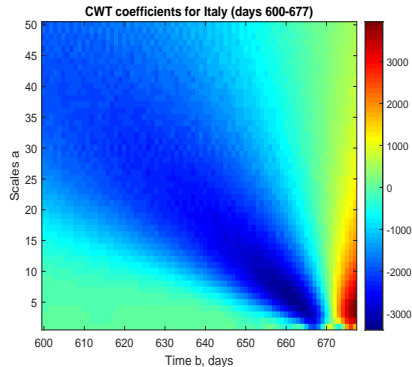


Zastosowania - Włochy, drugie różnice





(a) w dniach 1–677

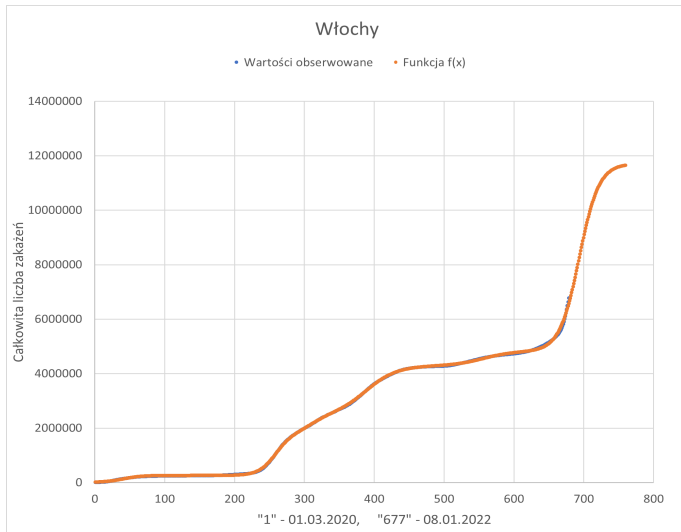


(b) w dniach 600–677

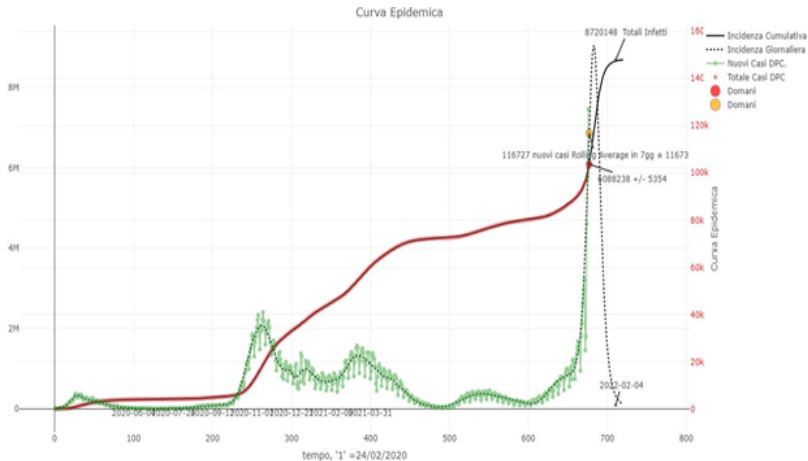
Figure: Analiza CWT dla Włoch w okresie 01.03.2020 – 08.01.2022



Zastosowania - Włochy, aproksymacja sumą funkcji logistycznych

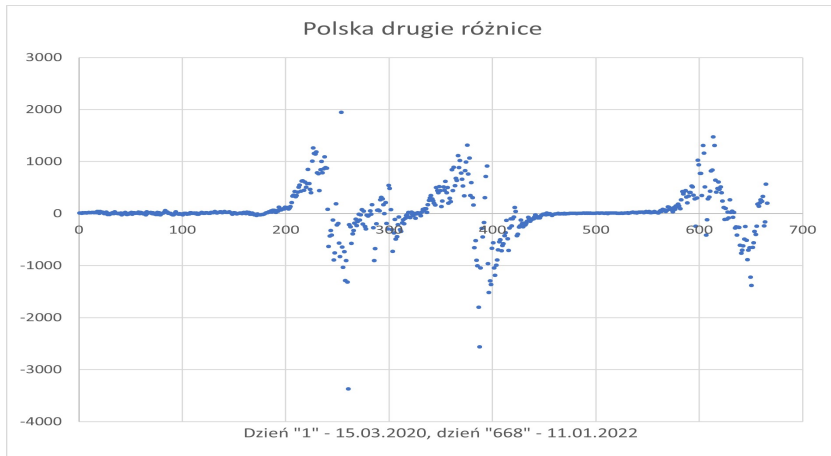


Zastosowania - Włochy

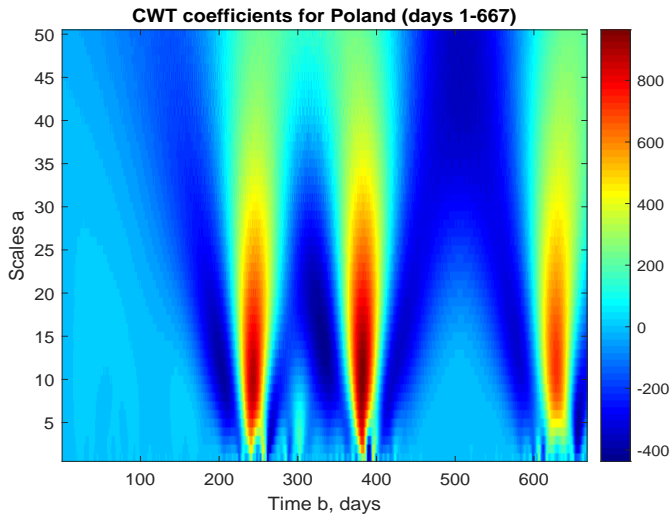


Prognoza dla Włoch inż. Del Vecchio za pomocą programu Loglet

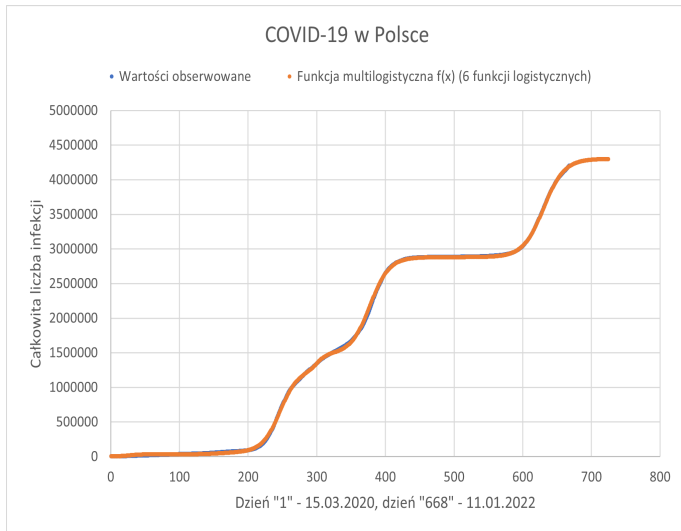
Zastosowania - Polska, drugie różnice



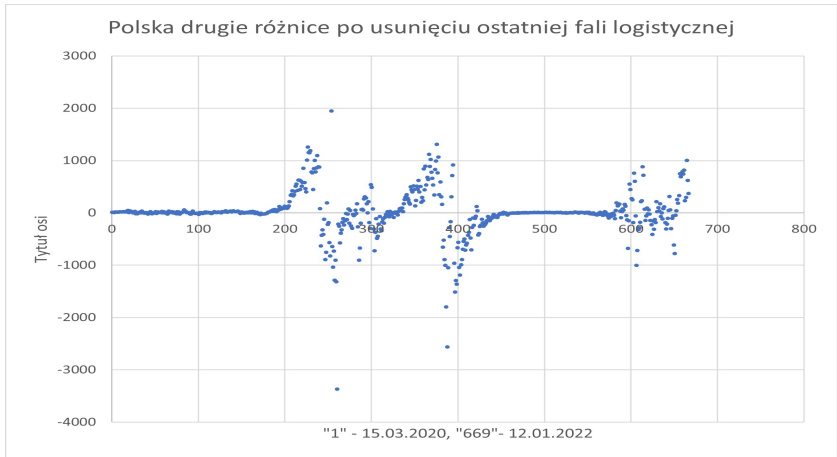
Zastosowania - Polska, skalogram, okres od 15.03.2020 do 11.01.2022



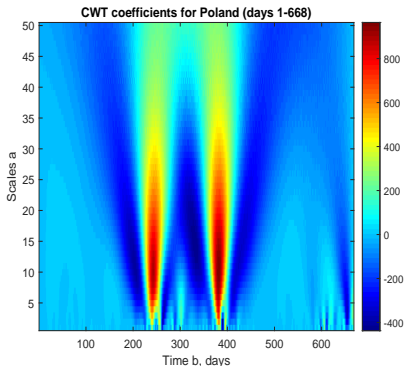
Zastosowania - Polska, aproksymacja sumą funkcji logistycznych



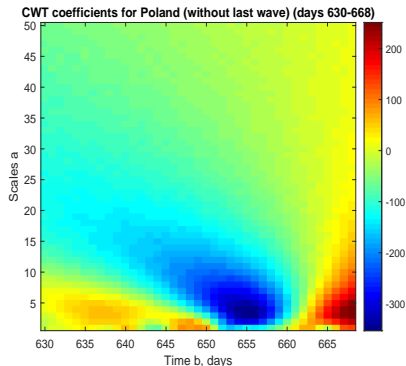
Zastosowania - Polska, drugie różnice po usunięciu ostatniej fali logistycznej



Zastosowania - Polska, skalogramy po usunięciu ostatniej fali logistycznej



(a) w dniach 1-668

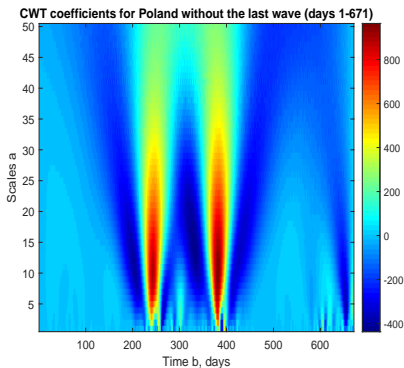


(b) w dniach 630-668

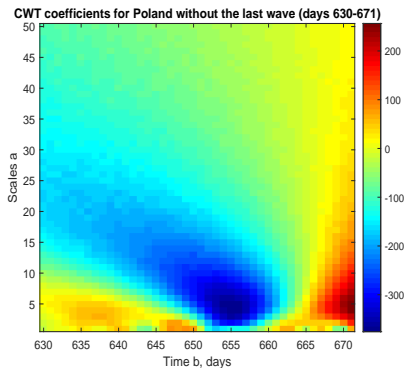
Figure: Analiza CWT dla Polski w okresie 15.03.2020 – 12.01.2022



Zastosowania - Polska 3 dni później, skalogramy po usunięciu ostatniej fali logistycznej



(a) w dniach 1–671

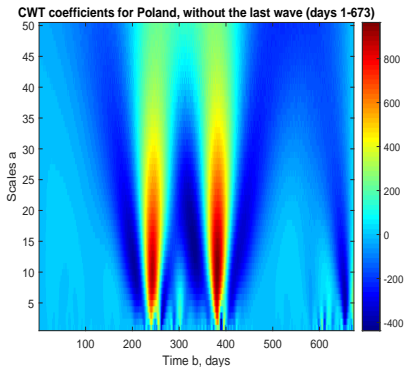


(b) w dniach 630–671

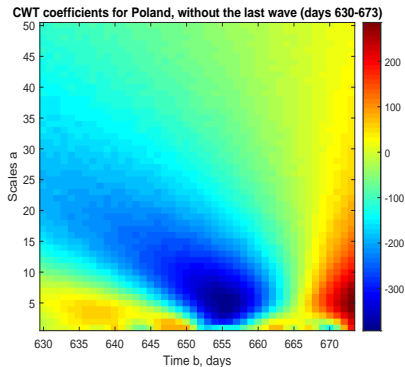
Figure: Analiza CWT dla Polski w okresie 15.03.2020 – 15.01.2022



Zastosowania - Polska 5 dni później, skalogramy po usunięciu ostatniej fali logistycznej



(a) w dniach 1–673



(b) w dniach 630–673

Figure: Analiza CWT dla Polski w okresie 15.03.2020 – 17.01.2022



Co można byłoby jeszcze zrobić?

- Wykorzystanie falek logistycznych wyższych rzędów
- Falki Gompertza.
- Falki dla uogólnień funkcji logistycznej.



- Bilge, A. H.; Ozdemir, Y. The Fourier transform of the first derivative of the generalized logistic growth curve, arXiv:1502.07182 [math.CA], (2015), 8 pp.
- Cazelles, B.; Cazelles, K.; Chavez, M. Wavelet analysis in ecology and epidemiology: impact of statistical tests. *J. R. Soc. Interface* **2014**, *11*: 20130585. <http://dx.doi.org/10.1098/rsif.2013.0585>
- Daubechies, I. *Ten lectures on wavelets*, 2nd ed., Philadelphia: SIAM, 1992. CBMS-NSF regional conference series in applied mathematics 61
- Dominici, D. Nested derivatives: a simple method for computing series expansions of inverse functions. *International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences* **2003**, *58*, 3699–3715.
- Dwight, H. B. *Tables of integrals and other mathematical data*, 4th ed.; The Macmillan Company, New York, 1961.
- Fokas, A. S.; Dikaios, N.; Kastis, G. A. Mathematical models and deep learning for predicting the number of individuals reported to be infected with SARS-CoV-2, *J. R. Soc. Interface* **2020**, *17*: 20200494. <http://dx.doi.org/10.1098/rsif.2020.0494>
- Franssens, G. R. Functions with derivatives given by polynomials in the function itself or a related function. *Analysis Mathematica* **2007**, *33*, 17–36.
- Graham, R. L.; Knuth, D. E.; Patashnik, O. *Concrete mathematics: A foundation for computer science*, Reading MA: Addison Wesley, 1994.



- Grenfell, B.T.; Bjørnstad, O. N.; Kappey, J. Travelling waves and spatial hierarchies in measles epidemics. *Nature* **2001**, *414*, 716–723.
<https://doi.org/10.1038/414716a>
- Kartono, A.; Wahyudi, S.T.; Setiawan, A.A.; Sofian, I. Predicting of the coronavirus disease 2019 (COVID-19) epidemic using estimation of parameters in the logistic growth model. *Infectious Disease Reports* **2021**, *13*, 465–485.
- Kowalski, K.; Steeb, W. H. *Nonlinear dynamical systems and Carleman linearization*, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., 1991.
- Krantz, S. G.; Polyakov, P.; Rao, A.S.R.S. True epidemic growth construction through harmonic analysis, *J. Theor. Biol.* **2020**, *494*: 110243.
<https://doi.org/10.1016/j.jtbi.2020.110243>
- Lavrova, A. I.; Postnikov, E. B.; Manicheva, O. A.; Vishnevsky, B. I. Bi-logistic model for disease dynamics caused by Mycobacterium tuberculosis in Russia. *R. Soc. Open Sci.* **2017**, *4*: 171033. <https://doi.org/10.1098/rsos.171033>
- Pelinovsky, E.; Kurkin, A.; Kurkina, O.; Kokoulina, M.; Epifanova, A. Logistic equation and COVID-19. *Chaos, Solitons and Fractals* **2020**, *140*: 110241.
- Rządkowski, G.; Głażewska, I.; Sawińska, K. Logistic function as a tool of planning. *Foundations of Management* **2014**, *6*, 57–70. DOI: 10.1515/fman-2015-0004
- Rządkowski, G. Eulerian numbers and Riccati's differential equation. In Proceedings of ICNAAM 2006, Greece, Eds. T. E. Simos; Wiley-VCH Verlag (2006), 291–294.
- Rządkowski, G. Derivatives and Eulerian numbers. *Amer. Math. Monthly* **2008**, *115*, 458–460.

- Rządkowski, G.; Rządkowski, W.; Wójcicki, P. On some connections between the Gompertz function and special numbers, *J. Nonlinear Math. Phys.* **2015**, 3, 374–380. <http://dx.doi.org/10.1080/14029251.2015.1079419>
- Rządkowski, G.; Głazewska, I.; Sawińska, K. The Gompertz function and its applications in management. *Foundations of Management* **2015** 7, 185–190. DOI: 10.1515/fman-2015-0035
- Rządkowski G.; Urlińska M. Some applications of the generalized Eulerian numbers, *J. Comb. Theory Ser. A.* **2019**, 163, 85–97. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jcta.2018.11.012>
- Rządkowski, G.; Figlia, G. Logistic Wavelets and Their Application to Model the Spread of COVID-19 Pandemic. *Appl. Sci.* **2021**, 11, 8147. <https://doi.org/10.3390/app11178147>
- Tsoularis, A. Analysis of logistic growth models. *Res. Lett. Inf. Math. Sci* **2001**, 2, 23–46. URL: <http://hdl.handle.net/10179/4341>
- Tsoularis, A.; Wallace, J. Analysis of logistic growth models. *Mathematical Biosciences* **2002**, 179, 21–55. DOI: [https://doi.org/10.1016/S0025-5564\(02\)00096-2](https://doi.org/10.1016/S0025-5564(02)00096-2)
- Vanucci, E.; Vanucci, L. Forecast Covid-19 end date in Italy by logistics waves. <https://www.researchgate.net/publication/341104205> (Accessed: 10 July 2021).
- Our World in Data. <https://ourworldindata.org/coronavirus-source-data>



Dziękuję za uwagę!

Dziękuję P.T. Organizatorom za możliwość wystąpienia na Seminarium

