



Modele układania tras pojazdów

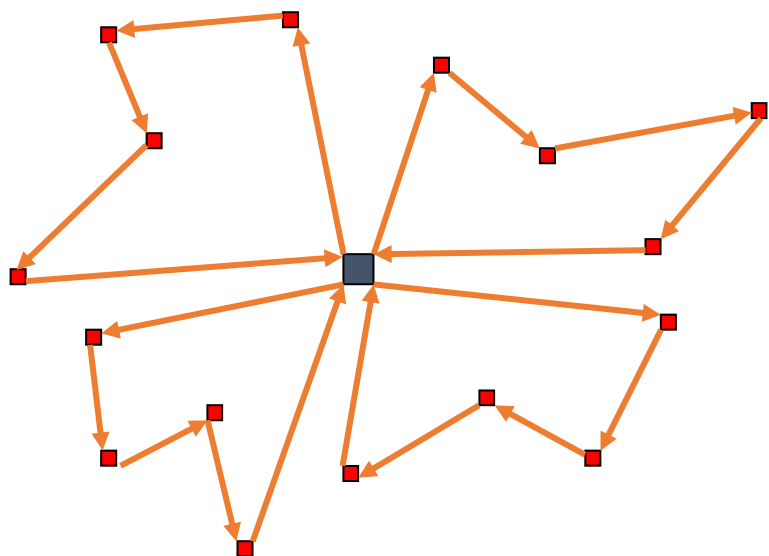
Radosław Jadczyk

Instytut Informatyki i Logistyki
Katedra Badań Operacyjnych



WYDZIAŁ
EKONOMICZNO-SOCJOLOGICZNY
Uniwersytet Łódzki

Układanie tras wielu pojazdów



1. wszystkie punkty trasy muszą zostać odwiedzone
 2. każdy punkt tras może być odwiedzony tylko jeden raz
 3. każdy punkt tras może być odwiedzony tylko przez jeden pojazd
 4. każdy pojazd wraca do bazy po odwiedzeniu wszystkich przydzielonych mu punktów
- podział zbioru wszystkich punktów na rejony dla poszczególnych pojazdów
 - konstrukcja trasy pojazdu w ramach rejonu



Układanie tras wielu pojazdów



$$\min F(\mathbf{x}) = \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^N \sum_{k=1}^K dx_{ij}^k$$

$$\sum_{i=0}^N \sum_{k=1}^K x_{ij}^k = 1$$

dla $j = 0, 1, \dots, N$

$$\sum_{i=0}^N x_{ip}^k - \sum_{j=0}^N x_{pj}^k = 0$$

dla $p = 0, 1, \dots, N$ oraz $k = 1, \dots, K$

$$\sum_{j=1}^N x_{0j}^k \leq 1$$

dla $k = 1, \dots, K$

$$z_i - z_j + (N + 1) \sum_{k=1}^K x_{ij}^k \leq (N + 1) - 1$$

dla $i, j = 1, \dots, N$ oraz $i \neq j$

$$x_{ij}^k = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases}$$

dla $i, j = 1, \dots, n$ oraz $k = 1, \dots, K$

Warianty układania tras wielu pojazdów



CVRP (*Capacitated Vehicle Routing Problem*)

VRPTW (*Vehicle Routing Problem with Time Windows*)

SDVRP (*Split Delivery Vehicle Routing Problem*)

VRPPD (*Vehicle Routing Problem with Pick-Up and Delivering*)

VRPB (*Vehicle Routing Problem with Backhaul*)

DVRP (*Dynamic Vehicle Routing Problem*)

MDVRP (*Multi-Depot Vehicle Routing Problem*)

MVRP (*Multiobjective Vehicle Routing Problem*)

PVRP (*Periodic Vehicle Routing Problem*)

VRPSF (*Vehicle Routing Problem with Satellite Facilities*)

SVRP (*Stochastic Vehicle Routing Problem*)



CVRP (Capacitated Vehicle Routing Problem) – ograniczenia zasobowe



1. ograniczenie ładowności pojazdu Q_k

$$\sum_{i=1}^n q_i \sum_{j=0}^n x_{ij}^k \leq Q_k \quad \text{dla } k = 0, 1, \dots, K$$

2. ograniczenie pojemności pojazdu V_k

$$\sum_{i=1}^n q_i \sum_{j=0}^n v_{ij}^k \leq V_k \quad \text{dla } k = 0, 1, \dots, K$$

3. ograniczenie czasu pracy pojazdu T_k

$$\sum_{i=1}^n t_i^k \sum_{j=0}^n x_{ij}^k + \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n t_{ij}^k x_{ij}^k \leq T_k \quad \text{dla } k = 0, 1, \dots, K$$

4. ograniczenie długości trasy pojazdu D_k

$$\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n d_{ij}^k x_{ij}^k \leq T_k \quad \text{dla } k = 0, 1, \dots, K$$

- flota pojazdów ograniczona lub nieograniczona
- pojazdów flota niejednorodna lub niejednorodna

VRPTW (*Vehicle Routing Problem with Time Windows*) – okna czasowe



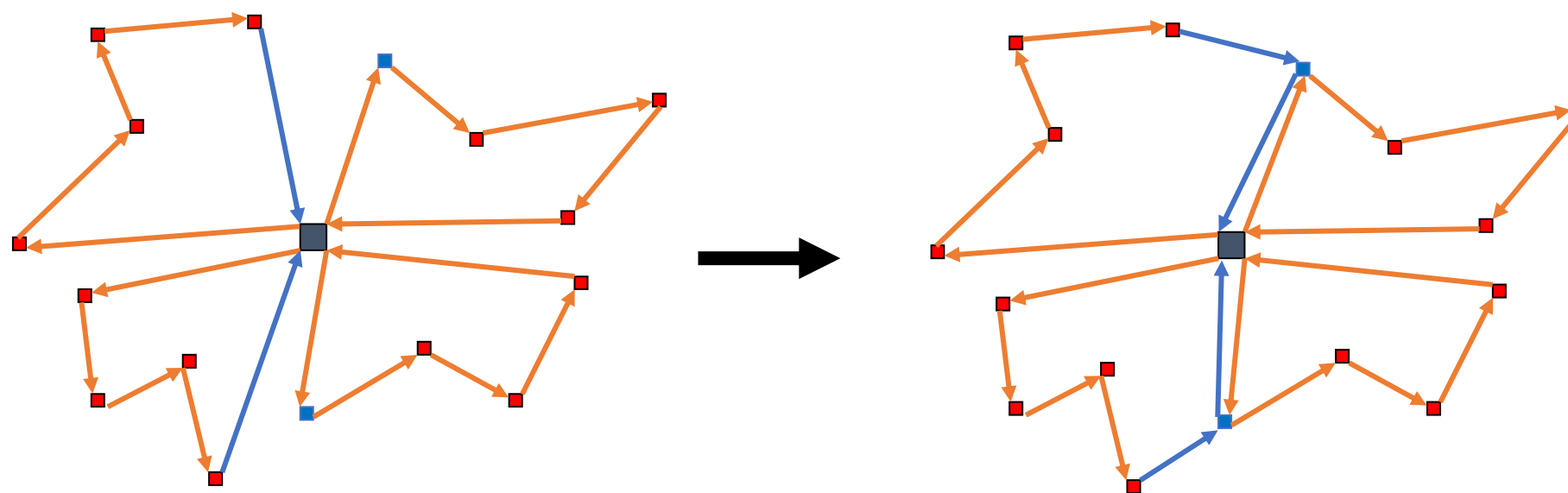
1. przedział czasu w jakim każdy punkt może być odwiedziny $[a_i, b_i]$
2. przybycie pojazdu wcześniej niż a_i oznacza oczekiwanie na obsługę
3. przybycie pojazdu później niż b_i oznacza
 - rozwiązanie niedopuszczalne (*hard windows*)
 - rozwiązanie dopuszczalne obarczone karą (*soft windows*)
4. Time Dependent Vehicle Routing Problem - TDVRP



SDVRP (Split Delivery Vehicle Routing Problem) – obsługa rozdzielona



1. każdy punkt tras może być odwiedzony przez więcej niż jeden pojazd
2. możliwość lepszego wykorzystania ładowności pojazdów, w szczególności gdy wielkość dostawy do punktu stanowi istotną jej część



VRPPD (*Vehicle Routing Problem with Pick-Up and Delivering*)

VRPB (*Vehicle Routing Problem with Backhauls*) – dostawy i/lub odbiór



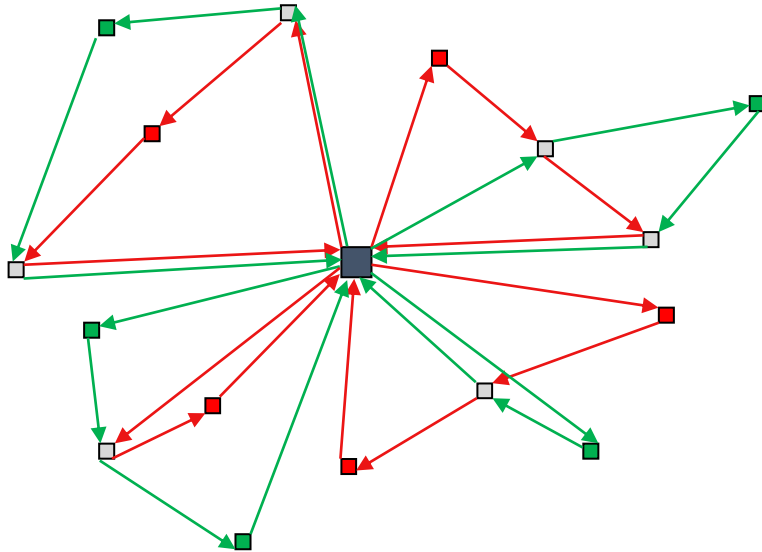
1. każdy punkt (obok bazy) może być zarówno dostawcą oraz odbiorcą „*wielu – do – wielu*”
2. każdy punkt (obok bazy) może być zarówno dostawcą oraz odbiorcą, ale każdy punkt odbioru ma tylko jednego skojarzonego z nim dostawcę „*jeden – do – jeden*”
3. dostawcą i odbiorcą jest baza „*jeden – do – wielu – do – jeden*”
 - do każdego punktu tylko dostarczany jest produkt lub tylko od niego odbierany
 - do każdego punktu zarówno dostarczany jest produkt, jak i od niego odbierany
 - kolejność odwiedzin punktów przez pojazd nie ma znaczenia
 - najpierw dostarczany jest produkt do punktów, a dopiero potem realizowane są odbiory



PVRP (Periodic Vehicle Routing Problem) – obsługa okresowa



1. ustalony okres planowania T (np. tydzień) jako zbiór kolejnych dni
2. ustalona częstotliwość f_i odwiedzania każdego punktu
3. Zbiór H alternatywnych harmonogramów odwiedzania każdego punktu



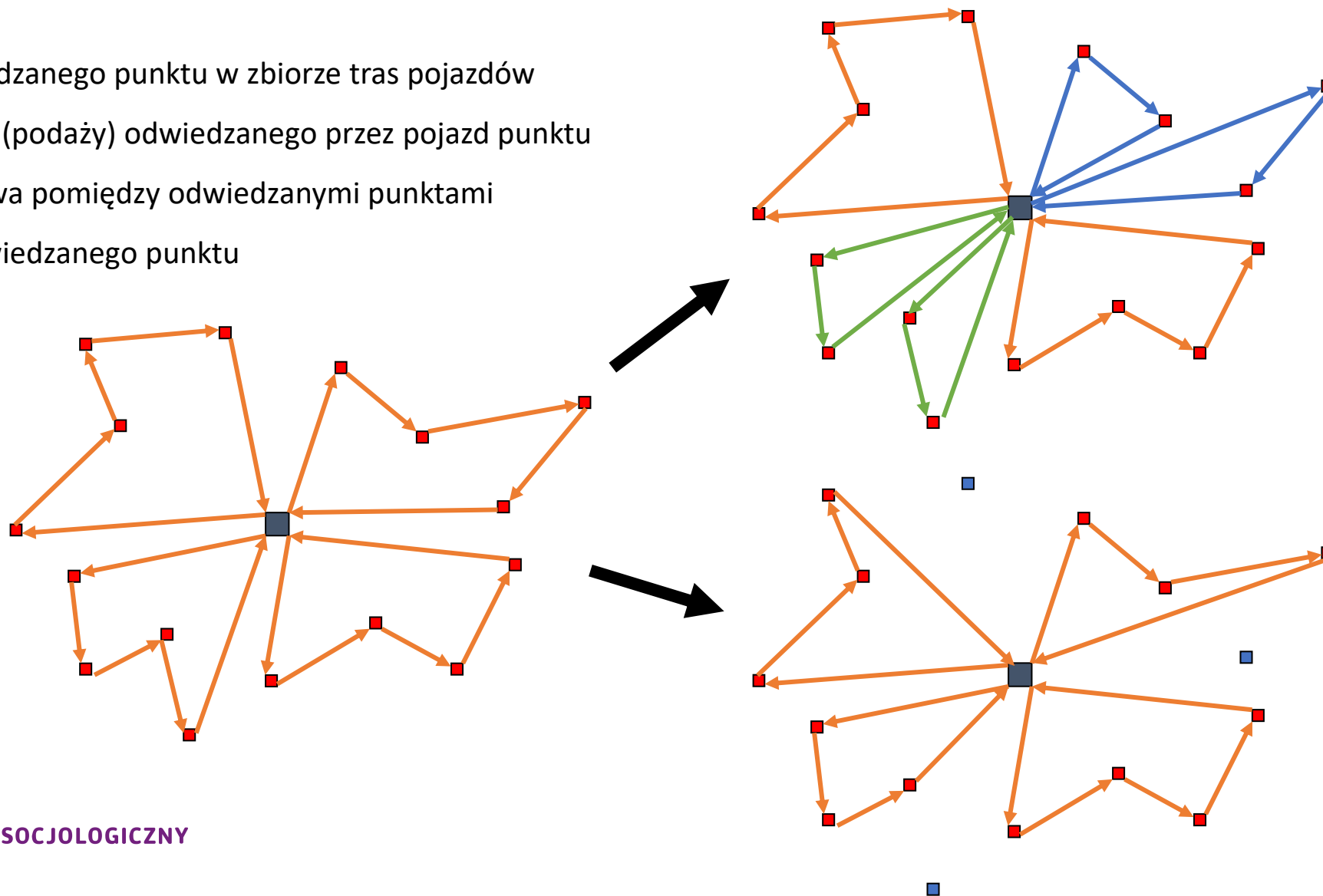
T	h_1	h_2	h_3	h_4	h_5	h_6	h_7	h_8	h_9	h_{10}
1	1	1	1	1						
2	1				1	1	1			
3		1			1			1	1	
4			1			1		1		1
5				1			1		1	1

$T = 5$
 $f_i = 2$

- podział zbioru wszystkich punktów na rejony dla poszczególnych pojazdów
- konstrukcja trasy pojazdu w ramach rejonu
- wybór dopuszczalnego harmonogramu odwiedzania punktu

SVRP (Stochastic Vehicle Routing Problem) – losowość parametrów problemu

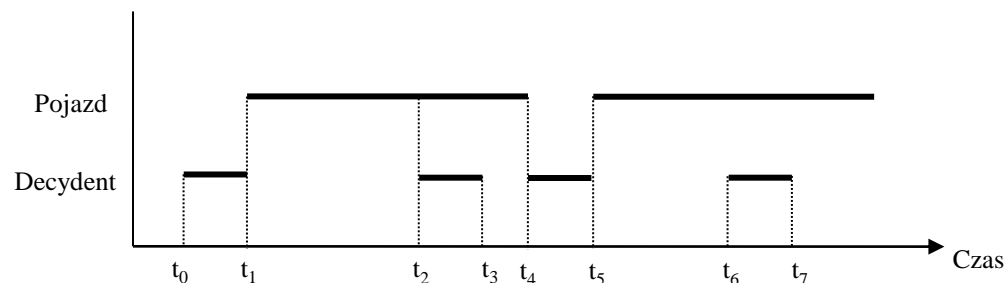
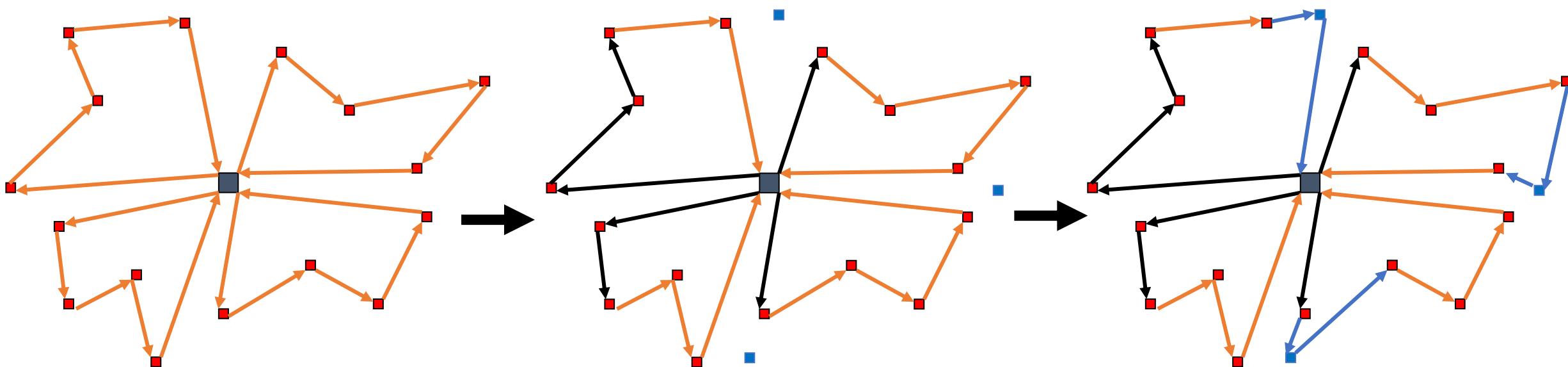
1. obecność odwiedzanego punktu w zbiorze tras pojazdów
2. wielkość popytu (podaży) odwiedzanego przez pojazd punktu
3. odległość czasowa pomiędzy odwiedzanymi punktami
4. czas obsługi odwiedzanego punktu



DVRP (*Dynamic Vehicle Routing Problem*) – zmienność problemu w czasie



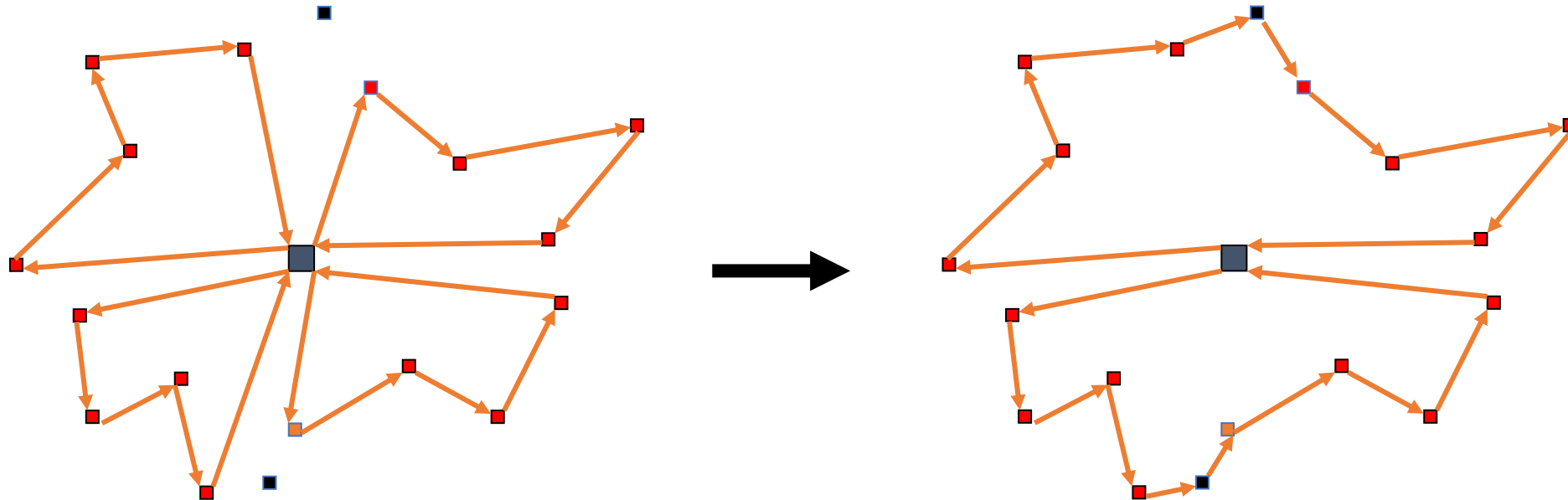
1. dane wejściowe do problemu są zmienne i zależne od czasu (ciągła aktualizacja)
2. rozwiązanie (układ tras pojazdów) musi być dostosowywany na bieżąco (korekty tras)
3. charakter danych nie zmienia się
4. znany jest sposób zmiany danych (możliwość tworzenia scenariuszy zmian bez ponownej optymalizacji)



VRPSF (Vehicle Routing Problem with Satellite Facilities) – uzupełnienia ładunku



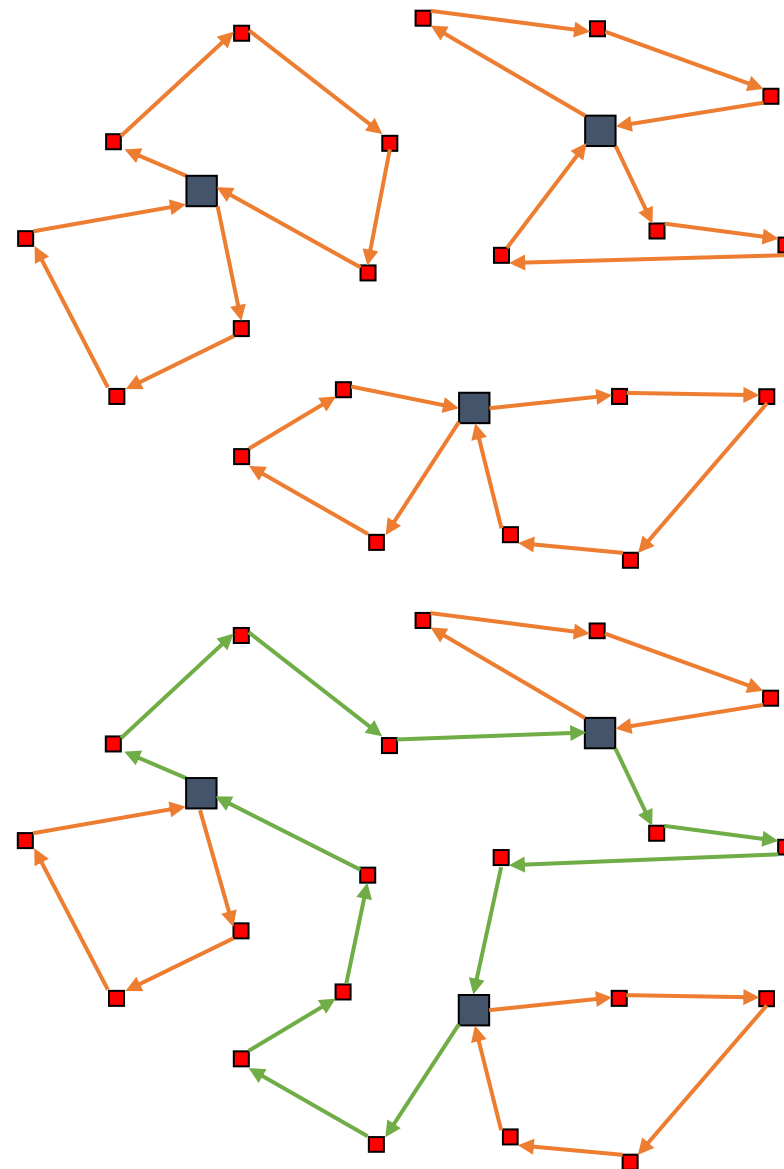
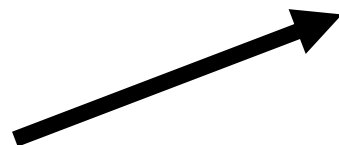
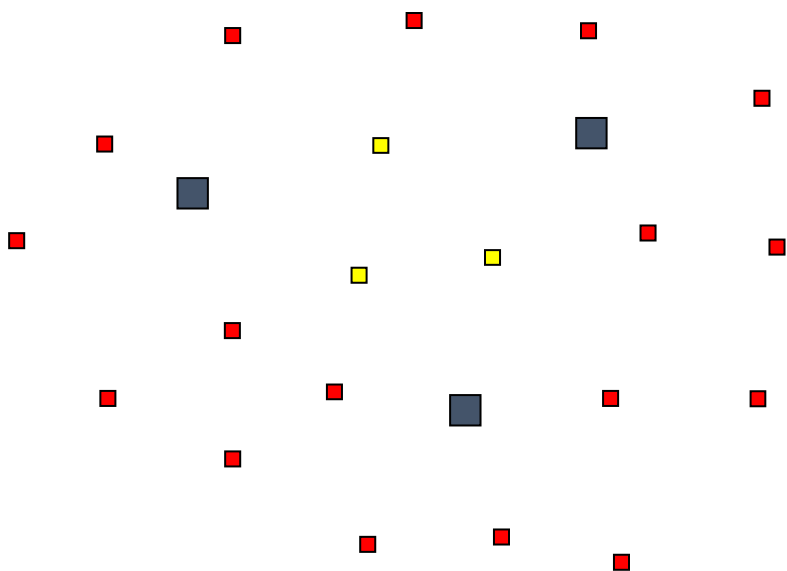
1. możliwość uzupełnienia ładunku przez pojazd w wyznaczonych lokalizacjach
2. trasa pojazdu zaczyna i kończy się w bazie



MDVRP (Multi-Depot Vehicle Routing Problem) – wiele baz



1. pojazd rozpoczyna i kończy trasę w tej samej bazie
2. pojazd może zakończyć trasę w innej bazie
3. rejonizacja baz – rejonizacja pojazdów – trasy pojazdów



MVRP (Multiobjective Vehicle Routing Problem) – wiele kryteriów oceny tras



1. przykłady kryteriów oceny rozwiązań:

- łączna długość (czas, koszt) trasy pojazdów
- liczba użytych pojazdów
- równomierność pracy pojazdów
- maksymalna długość trasy pojazdu
- wykorzystanie ładowności pojazdu
- czas oczekiwania pojazdów na obsługę (*VRPTW*)
- czas opóźnień pojazdów (*VRPTW*)
- przyporządkowanie pojazdu do tego samego klienta (*PVRP*)



MVRP (Multiobjective Vehicle Routing Problem) – wiele kryteriów oceny tras



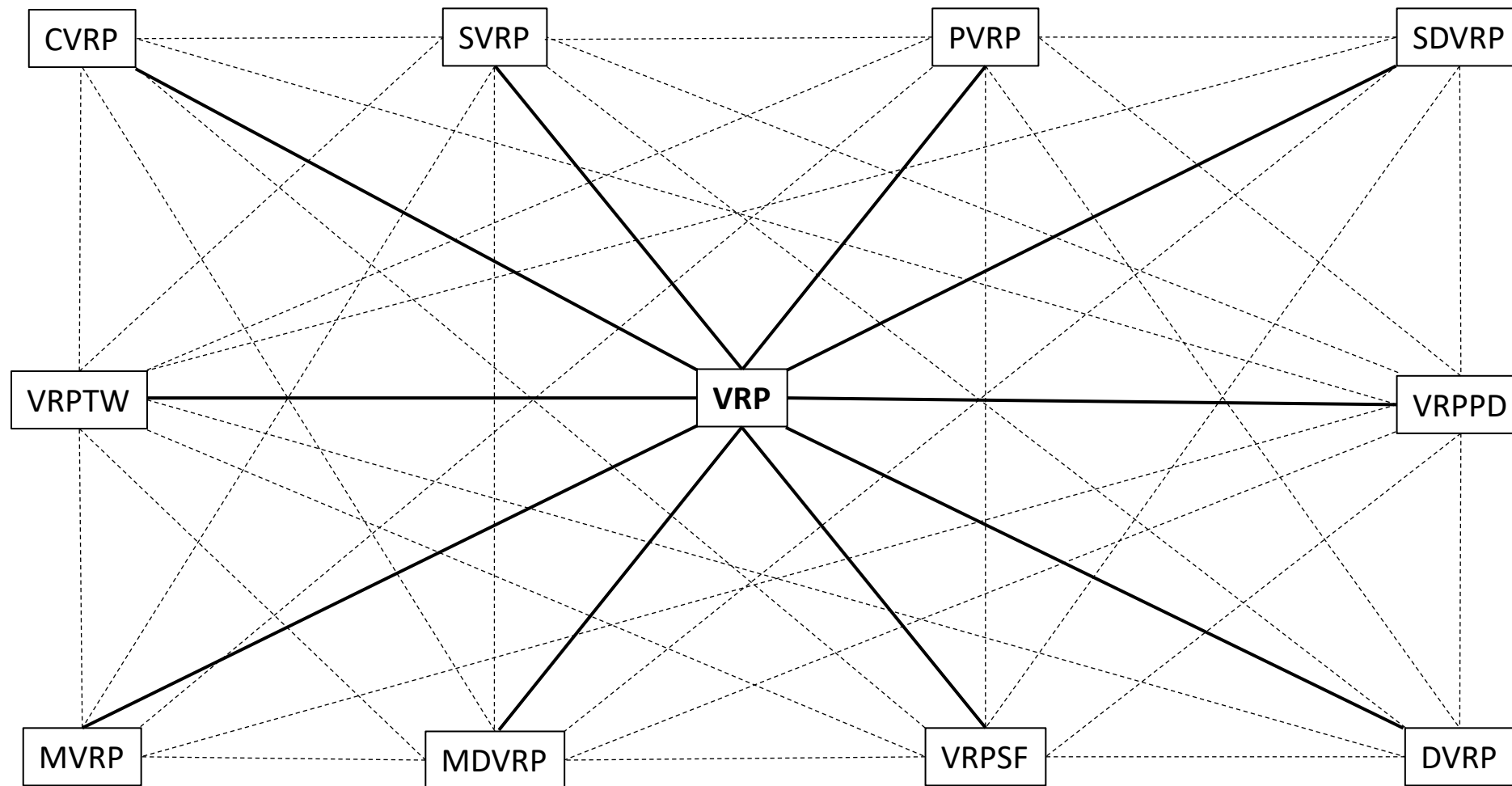
2. Preferencje:

- bez określenia preferencji
- a’priori
- a’posteriori

- jedna funkcja jako suma ważona
 - ✓ konwersja do tej samej jednostki (np. ujęcie wartościowe)
 - ✓ skalaryzacja (konwersja na wielkości bez jednostek)
- wybrane cele jako ograniczenia



Hybrydyzacja problemów VRP



Wybrane zastosowania modeli VRP



1. Usługi kurierskie (Tebaldi i in. 2020) – CVRPTW

- kilkudziesięciu klientów, w tym obsługa większości części z nich w godz. 10-18, a części w godz. 10-13
- ograniczenia dotyczące ładowności pojazdów i czasu ich pracy

2. Dystrybucja (Kramera i in. 2019) – MDCVRPTW (RVRP – *Rich* VRP)

- dostawy produktów farmaceutycznych do szpitali i placówek opieki zdrowotnych (kilkaset punktów odbioru)
- problem wielobazowy (magazyny główne i pomocnicze)
- niejednorodna flota pojazdów
- okna czasowe
- dostawy okresowe (na ustalony okres 6 dni)
- ograniczenia dotyczące możliwości wykorzystania pojazdu u danego odbiorcy
- maksymalny czas trwania trasy i liczby klientów w trasie



Wybrane zastosowania modeli VRP



3. Organizacja domowej opieki zdrowotnej (Moussavi i in. 2019) – PVRP

- liczba pacjentów: 10-30
- liczba pracowników: 4-10
- liczba planowanych dni: 2-14, dzień podzielony na okresy godzinne (czas trwania wizyty 1 h)
- minimalizacja łącznej długości wszystkich tras pracowników w całym okresie planowania
- minimalizacja najdłuższej trasy dziennej pracownika
- minimalizacja najdłuższej trasy pracownika w całym okresie planowania

4. Zarządzanie pracą patroli policyjnych (Saint-Guillain 2021) – SVRP

- budowa tras patroli dla wyznaczonych wcześniej miejsc „oczekiwania” na zgłoszenie
- obsługa przez patrol pojawiających się losowo zdarzeń
- minimalizacja oczekiwanego czasu odpowiedzi na zgłoszenia (od momentu pojawienia się zgłoszenia w systemie do przybycia patrolu na miejsce)

Wybrane zastosowania modeli VRP



5. Usługi komunalne (odbiór odpadów) (Angelleli i Speranza 2002) – SFPVRP
 - więcej niż 1 punkt odbioru odpadów (nie są bazami)
 - możliwość kontynuowania trasy po odwiezieniu odpadów do punktu odbioru
 - ograniczenia dotyczące czasu trwania trasy i ładowności pojazdu
 - ilość odbieranych śmieci jako zmienna losowa (Markovic 2019)

6. Usługi komunalne (odsnieżanie ulic) (Perier i in 2007) – CVRPTW
 - miasto przedstawione jako graf 462 węzłów i 1234 krawędzi reprezentujących ulice (3 kategorie ulic)
 - trzy typy pojazdów o różnych wydajnościach pracy (różna prędkość, ładowność)
 - dodatkowe ograniczenia dotyczące m.in. priorytetów odsnieżanych ulic, ulic jednokierunkowych (brak możliwości skrętów)

Wybrane zastosowania modeli VRP



7. Usługi serwisowe (Tricoire 2007) – PVRPTW

- sieć dystrybucji i uzdatniania wody
- określone terminy obsługi punktu (część musi być wykonana w danym dniu, część ma ustalony okres ważności dni)
- niektóre żądania obsługi mogą być odroczone (dodatkowa kara);
- pojazdy nie muszą rozpoczynać tras z bazy – punkty początkowe mogą być inne związane z danym technikiem;
- minimalizacja odległości wszystkich tras techników;
- minimalizacja liczby zgłoszeń, które nie mogą być wykonane w określonym terminie

8. Planowanie pracy dronów (Cannioto, 2013) – CVRP

- ocena stanu technicznego obiektów uszkodzonych w wyniku trzęsienia ziemi
- ograniczony zasięg dronów
- minimalizacja łącznej długości ścieżek dronów
- określenie najlepszej lokalizacji startu dronów



Wybrane zastosowania modeli VRP



1. logistyka dystrybucji oraz zaopatrzenia
2. logistyka zwrotna (np. zużytych produktów)
3. przewozy pocztowe i kurierskie
4. transport publiczny
5. transport wewnętrzny (np. magazynie)
6. planowanie ruchu robotów w procesie produkcyjnym
7. służba zdrowia
8. usługi serwisowe
9. planowanie tras w zwalczaniu pasożytów



Metody układania tras pojazdów



1. Dokładne

2. Przybliżone (heurystyczne)

➤ konstrukcyjne

➤ wieloetapowe (dla wielu pojazdów)

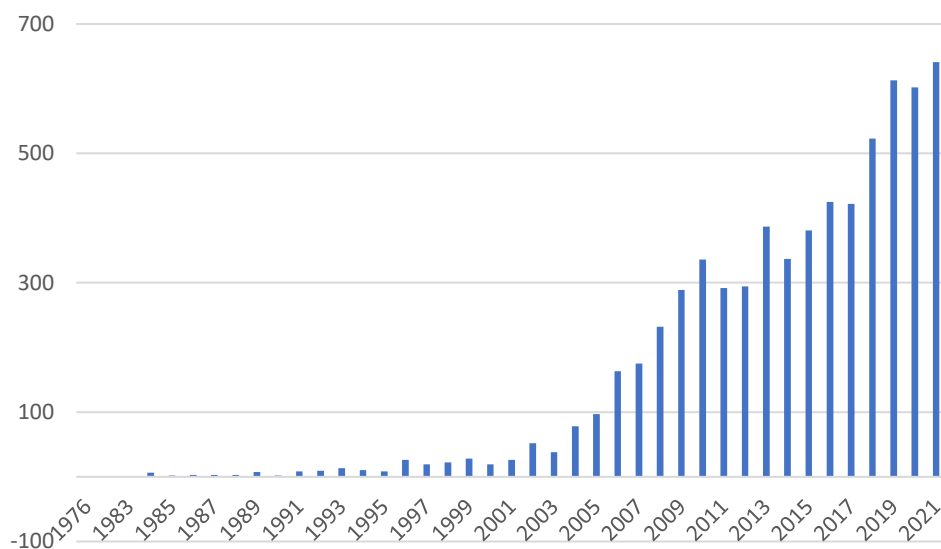
- rejony → trasy
- trasa → rejony

➤ poprawy (wzrostu)

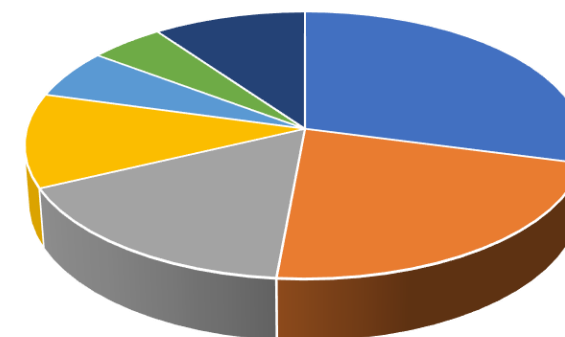
- jednoagentowe
- wieloagentowe



Bibliografia VRP



- Computer Science
- Engineering
- Mathematics
- Decision Sciences
- Business, Management and Accounting
- Social Sciences
- Other



Bibliografia VRP



- Angelelli E., Speranza M.G., *The application of a vehicle routing model to a waste-collection problem: two case studies*, Journal of the Operational Research Society 53, str. 944-952, 2002
- Berbeglia G., Cordeau J.-F., Gribkovskaia I., Laporte G., *Static pickup and delivery problems: a classification scheme and survey*, Top 15, pp. 1-31, 2007
- Bertsimas D.J., *A vehicle routing problem with stochastic demand*, Operation Research Vol. 40, pp. 574-585, 1992
- Cannioto M., D'Alessandro A., Lo Bosco G., Scudero S., Vitale G., *Brief communication: Vehiclse routing problem and UAV application in the post-earthquake scenario*, Natural Hazards and Earth System Sciences, 17, str. 1393-1946, 2017
- Contardo C., Martinelli R., *A new exact algorithm for the multi-depot vehicle routing problem under capacity and route length constraints*, Discrete Optimization Vol. 12, pp. 129-146, 2014
- Jadczyk R., *Układanie tras pojazdów w łańcuchu dostaw. Modele, metody, zastosowania*, Wydawnictwo Uniwersytetu Łódzkiego, Łódź 2019
- Francis P.M., Smilowitz K.R., , *Modeling techniques for periodic vehicle routing problems*, Transportation Research: Part B 40, pp. 872-884, 2006
- Francis P.M., Smilowitz K.R., Tzur M., *The period vehicle routing problems*, Transportation Science 40, pp. 439-454, 2006
- Golden B., Magnanti T.L., Nguyen H.Q., *Implementing vehicle routing algorithms. Networks*, Vol 7, pp. 113-148, 1997
- Jozefowicz N., Semet F., Talbi E.-G., *Multi-objective vehicle routing problems*, European Journal of Operational Research 189, pp.293-309, 2008
- Markovic D., Petrovic G., Cojbasic Z., *A metaheuristic approach to the waste collection vehicle routing problem with stochastic demands and travel times*. Acta Polytechnica Hungarica 16, str. 45–60, 2019
- Pillac V., Gendreau M., Gueret Ch., Medaglia A.L., *A review of dynamic vehicle routing problems*, European Journal of Operational Research 225, pp. 1-11, 2013
- Tebaldi L., Murino T., Bottani E., *An adapted version of the water wave optimization algorithm for the capacitated vehicle routing problem with time windows with application to a real case using probe data*, Sustainability 12(9), 2020



Dziękuję za uwagę

Radosław Jadczyk
radoslaw.jadczyk@uni.lodz.pl



**WYDZIAŁ
EKONOMICZNO-SOCJOLOGICZNY**
Uniwersytet Łódzki